MPSI

DS de mathématiques n°2

11 oct. 2025

Calcul algébrique, sommes et produits, trigonométrie, complexes, etc.

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées. **Le sujet contient 2 pages.**
La clarté de la copie pourra faire varier la note de ±1 point. Il est conseillé de commencer par les premiers exercices.

Exercice 1 : Un peu de tout !

Les questions 1) à 4) de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \leq 2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{x}$

3) **a)** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.

b) Montrer par récurrence que : $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

4) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient $f(mn) = mf(m) + nf(n)$ pour tous entiers naturels m et n.

Exercice 2 : Calculs dans $\mathbb{C}$

1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que :

$$\left|\frac{1+i\,z}{1-i\,z}\right| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \pi \ [2\pi]$. Montrer que :

$$i \times \frac{1-e^{i\,\theta}}{1+e^{i\,\theta}} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

3) On pose $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. Déterminer les racines cubiques de Z.

4) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1-i\,z)^3(1+i\sqrt{3}) = (1+i\,z)^3(1-i\sqrt{3})$$

5) Le résultat obtenu à la question **4)** est-il cohérent avec celui de la question **1)** ?

Énigme (non notée) : On considère la Terre comme une sphère de rayon $R = 6400$ km. On tend une corde gigantesque tout autour de la Terre au niveau de l'équateur. On aimerait ensuite tendre cette même corde à un mètre au-dessus du sol. Combien de mètres de corde faut-il rajouter ?

Exercice-problème 3 : Sommes des cosinus carrés

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$$

1) Donner la valeur de $A_n(x)$ et de $B_n(x)$ lorsque $x \equiv 0 \ [2\pi]$.

2) À partir de cette question, on suppose que x est un réel quelconque dans $\mathbb{R}$ et $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

- **a)** En justifiant, compléter la formule $\sin(a)\cos(b) = \ldots\ldots$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- **b)** Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) A_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

3) Démontrer, à l'aide d'une formule trigonométrique, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}A_n(2x)$$

4) En distinguant les cas $x \equiv 0 \ [\pi]$ et $x \not\equiv 0 \ [\pi]$, exprimer $A_n(x)$ en fonction de n et de x.

5) En déduire une expression de $B_n(x)$ en fonction de n et de x.

6) On pose $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$.

- **a)** Montrer qu'il existe deux réels α et β qu'on déterminera tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \cos^3(y) = \alpha \cos(3y) + \beta \cos(y)$$

- **b)** En déduire une expression de $C_n(x)$ en fonction de n et de x.

Exercice 4 : Somme liée à $e^{\frac{2i\pi}{7}}$

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose : $\quad S = u + u^2 + u^4 \quad$ et $\quad T = u^3 + u^5 + u^6$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et ω une racine n-ième de l'unité. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^k$.

2) Calculer $S + T$ et $S \times T$.

3) En déduire les valeurs de S et de T.

Exercice 5 : Vous en voulez encore ? Voici le boss final...

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le fait que pour tout réel x, on a $(1+x)^{n+p} = (1+x)^n(1+x)^p$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, n+p]\!] \qquad \binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.